



图 1: 离心调速器.

**习题 1(离心调速器).** 图 1 所示的力学系统称为离心调速器. 两根长度相等的轻质杆与竖直轴在 A 点通过铰链连接, 其下端分别与两个质量为  $m_1$  的重物连接, 两重物又通过轻质杆与质点  $m_2$  连接.  $m_2$  可沿竖直轴运动. 整个系统与竖直轴位于同一平面内, 并以常角速度  $\omega$  绕该轴转动. 计算其拉氏量与运动方程.

**习题 2(对称规范).** 均匀磁场  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  的矢量势的另一种常用的取法为  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (-Bx_2/2, Bx_1/2, 0)$ , 称为对称规范. 带电粒子的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}eB(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1). \quad (1)$$

(a) 分别考察系统在三个空间方向的平移变换, 导出相应的守恒量.

(b) 取柱坐标  $(r, \theta, z)$ , 利用坐标变换  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ , 计算带电粒子的拉氏量和能量在柱坐标中的形式与广义坐标  $r, \theta$  与  $z$  对应的共轭动量  $p_r, p_\theta$  与  $p_z$ . 它们是否守恒?

**习题 3.** 一个质量为  $m$  的质点置于垂直放置的圆环顶端. 圆环半径为  $a$ . 利用拉格朗日乘子法计算圆环对质点的支撑力, 并求出质点跌离圆环时的高度.

**习题 4.** 若圆盘在倾角为  $\alpha$  的斜面上做无滑动的滚动. 在例 VIII.1 的拉氏量中增加一项重力势能,

$$V = -mgx \sin \alpha, \quad (2)$$

求解圆盘的运动.

**习题 5.** 拉格朗日力学通常用于保守力, 而宏观力学系统中常见的耗散力(如摩擦力)可以通过引入耗散函数来处理(可参考 Goldstein 书第 1.5 节). 有些情形下, 耗散效应也可以用含时的拉氏量表达. 考虑如下拉氏量

$$L = e^{\gamma t} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right), \quad (3)$$

导出相应的运动方程并求解. 它描述了什么力学系统? 取坐标变换

$$s = e^{\gamma t/2} q, \quad (4)$$

导出用广义坐标  $s$  表达的拉氏量, 并找出系统的守恒量.